2021年8月 オープンキャンパス
愛媛大学 理学部理学科 数学・数理情報コース
模擬授業 (発展)
「数学・数理情報コース的ぬりえ教室」
担当：尾國 新一

本資料は,「ぬりえ講義前編動画」の視聴,「ぬりえ演習 Oguni.pdf」での演習,「ぬりえ講義後編動画」の視聴という手順を踏んでからお読みいただくことを想定したものです. ここまでの復習, および, 発展的な内容をステップを踏んで取り組める問題として記したので, ぜひトライしてほしいと思います. 大学で学ぶ内容を含むので, 今はざっと眺めるだけにして, 大学生になってからの楽しみにとっておくのも良いでしょう. 未解決問題も挙げていますので, 一生の楽しみにすることもできるかもしれません.

大辞泉（小学館）において, ぬりえは次のように説明されている.「紙に絵の輪郭だけが描かれたもの. これに色を塗って遊ぶ.」さて, ここで**数学・数理情報コース的ぬりえ**を以下のように定義しよう.「紙に絵の輪郭だけが描かれたもの. **次のルールを守って**これに色を塗って遊ぶ.」

- 線で囲われた領域は同じ色で塗る.
- 線を隔てて隣り合う領域は異なる色で塗る.
- 背景も一つの領域とみなす.
- **できるだけ少ない色を使う.**

やや細かな注意になるが, 紙に絵の輪郭だけが描かれたものを取り扱うので, 絵には輪郭と無関係な線はないものとする.

1.「ぬりえ」および「輪郭」の意味を辞書などで調べよ.
2.「ぬりえ講義前編動画」を参考に,「ぬりえ演習 Oguni.pdf」にある絵に対して, 数学・数理情報コース的ぬりえを実行せよ（丁寧に塗る必要は全くない）.
3. 数学・数理情報コース的ぬりえにおいて, 成り立ちそうなことはないか考察せよ.

いくつか数学・数理情報コース的ぬりえを実行してみると,「どんな数学・数理情報コース的ぬりえも 4 色以下で実行できる」のではと思い至るだろう. 実際これは正しく, 1976 年にハーケンとアッペルによって証明され, 4 色定理と呼ばれている. 彼らの証明はコンピュータを利用したのもので, 証明は現在においても非常に難解である. コンピュータを用いない証明は知られていない.

4.「4 色定理」を検索サイトなどを利用して調べよ. (4 色定理にまつわる話をより楽しみたい方は, 例えば, 「ロビン ウィルソン (著), 茂木 健一郎 (訳), 四色問題 (新潮文庫), 新潮社」を見るとよいだろう.)
5. どんな数学・数理情報コース的ぬりえも 4 色以下で実行できることをコンピュータを用いずに示せ. (未解決問題)

さて, 他にどのようなことが一般的に言えるだろうか? 実は, 後で述べるように数学・数理情報コース的ぬりえが丁度 2 色で実行可能かどうかは簡単に判定できる. 一方で数学・数理情報コース的ぬりえが丁度 3 色で実行可能かどうかの'簡単な'判定方法は知られていない. '簡単な'の意味を適切に設定したうえで, これを肯定的に解けば, 有名な未解決問題「$P \neq NP$ か?」に否定的に答えることになり, 世界中に天変地異の衝撃を与えることになるだろう. ちなみに, 「$P \neq NP$ か?」は解いたら 100 万ドルもらえるミレニアム懸賞問題(クレイ数学研究所)にもなっている.

6. 未解決問題「$P \neq NP$ か?」を含む「ミレニアム懸賞問題」を検索サイトなどを利用して調べよ. (文献はいくつかあるが, 例えば, 「中村 亨 (著), 数学 21 世紀の 7 大難問—数学の未来をのぞいてみよう (ブルーバックス), 講談社」が手に取りやすいかもしれない.)
7. 数学・数理情報コース的ぬりえが丁度 3 色で実行可能かどうかの'簡単な'判定方法を与えよ. (未解決問題)

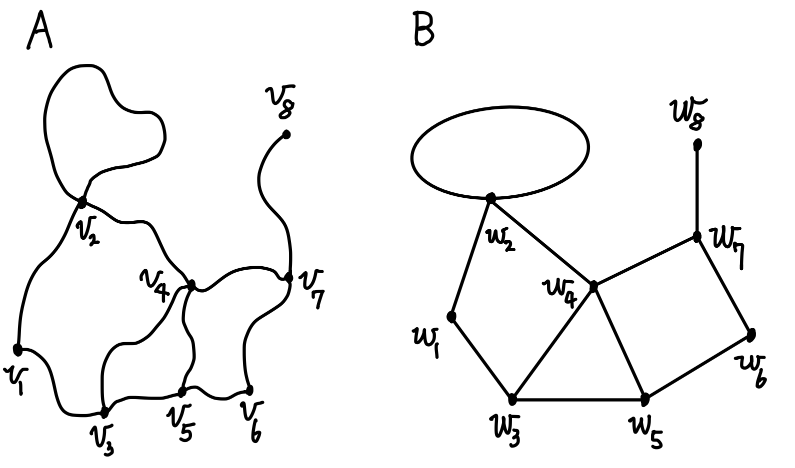
数学・数理情報コース的ぬりえが丁度 2 色で実行可能かどうかの簡単な判定方法を与える前に, 丁度 2 色で実行可能な数学・数理情報コース的ぬりえの描き方を見ておこう.

8. 「ぬりえ講義後編動画」を参考に, 「ぬりえ演習 Oguni.pdf」にある絵のうち, 丁度 2 色で数学・数理情報コース的ぬりえが実行可能なものは, いずれも「ペンを走らせ始めて , スタートとゴールが一致したときのみペンを離すという作業」すなわち「スタートとゴールが一致する一筆書き」を有限回行うことで描けることを確認せよ. この際, すでに描いてある線に沿ってペンを走らせることは禁止とする.
9. 丁度 2 色で数学・数理情報コース的ぬりえが実行可能な絵を作成せよ. また, 実際に色をぬってみよ.
10. 丁度 2 色で数学・数理情報コース的ぬりえが実行可能な絵の描き方を誰かに説明してみよう.

以下, 丁度 2 色で実行可能な数学・数理情報コース的ぬりえについて調べていく. まずは, 用語を準備する. 平面に描かれた有限個の頂点と有限個の辺からなる図形 G を考える. 以下の約束が守られているとき, G を平面グラフと呼ぶ.

- 頂点はある辺の端点である.
- 辺の端点は頂点である.
- 辺は端点以外では交わらない.
- 辺はくねくね曲がって描かれていても良い.

11. 下の図形 A と B はいずれも, 頂点が 8 つで, 辺が 11 本ある平面グラフであることを確認せよ.



その他の用語と約束を書いておく.

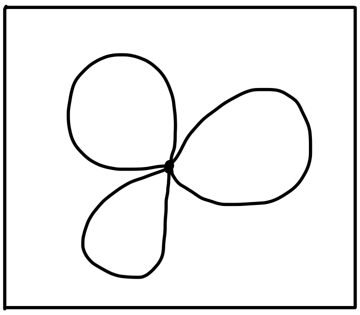
- 各頂点 v に対し, v を端点とする辺の数を v の次数と呼ぶ. ただし, 両端が v となる辺は二回カウントする.
- 二つの平面グラフが与えられたとき, 一方をくねくねと（伸び縮みも許して）連続的に動かしてもう一方に（頂点は頂点に, 辺は辺に）重ねられるとき, これらは同じ平面グラフとみなす.

12. 上の平面グラフ A に対して, 頂点 v_1 の次数は 2, 頂点 v_2 の次数は 4, 頂点 v_3 の次数は 3, 頂点 v_4 の次数は 4, 頂点 v_5 の次数は 3, 頂点 v_6 の次数は 2, 頂点 v_7 の次数は 3, 頂点 v_8 の次数は 1 であることを確認せよ.
13. 上の平面グラフ B の各頂点の次数を求めよ.
14. 上の平面グラフ A と B は同じ平面グラフとみなされることを確認せよ.

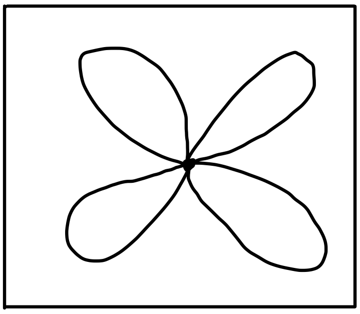
平面グラフを紙に描き, 輪郭だけからなる絵が得られたとき, 数学・数理情報コース的ぬりえを実行してみよう.

15. 頂点が丁度 1 つの平面グラフのうち, 三つ葉, 四つ葉のクローバーの形をしたものを順に C_3, C_4, k を 1 以上の整数として, 同様に k つ葉のクローバーの形をしたものを C_k とおく. これらは丁度 2 色で数学・数理情報コース的ぬりえが実行可能であることを確認せよ.

C_3

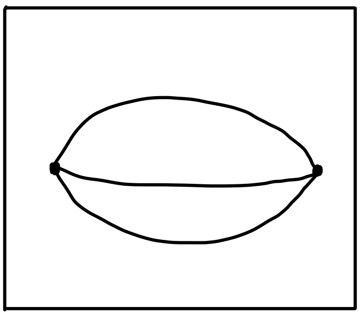


C_4

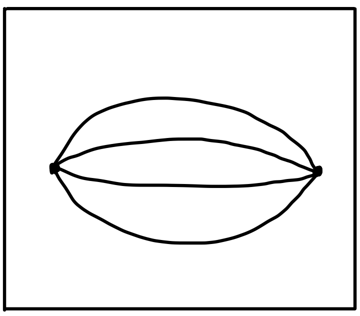


16. k を 2 以上の整数として, 頂点が丁度 2 つの平面グラフのうち, すべての辺が 2 頂点をつないでおり, 辺の数が k 本からなるものを D_k とおく. このとき, k が偶数であることは, D_k が丁度 2 色で数学・数理情報コース的ぬりえが実行可能であるための必要十分条件であることを確認せよ.

D_3



D_4



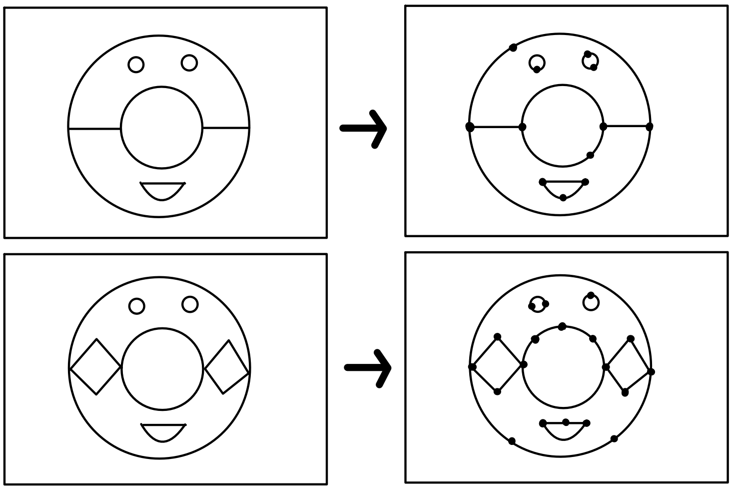
17. 上で扱った平面グラフ A および B を紙に描いたとき, 輪郭だけが描かれた絵にならないため, 数学・数理情報コース的ぬりえの対象とならないことを確認せよ.

実は, 平面グラフ G に対し次が同値である.

(i) G を紙に描いたとき, 数学・数理情報コース的ぬりえを丁度 2 色で実行可能である.
(ii) G は「スタートの頂点とゴールの頂点が一致する一筆書き」を有限回行うことで得られる（ただし, 同じ辺を二度通ることは禁止）.
(iii) G の各頂点の次数はすべて偶数である.

(ii) は描き方を, (iii) は判定方法を与えている.

18.「ぬりえ演習 Oguni.pdf」にある絵が丁度 2 色で実行可能かどうか (iii) を用いて判定せよ. ただし, 下の例のように各絵を適当に頂点と辺からなる平面グラフとみなすこと.



(i)(ii)(iii) の同値性の証明については, 例えば, 「砂田 利一（著）, 現代幾何学への道—ユークリッドの蒔いた種（数学、この大きな流れ）, 岩波書店」が参考になるだろう. ここでは証明の一部に, 今まで扱った例を振り返りつつトライしてみよう.

19. 頂点の周りに注目することで, (i) ならば (iii) を示せ .
20. 頂点の周りに注目することで, (ii) ならば (iii) を示せ .

なお, 平面グラフの数学・数理情報コース的ぬりえは通常, (面) 彩色問題と呼ばれることをお断りしておく.

本模擬授業はこれでおしまいです。お疲れさまでした. 次は大学でお会いしましょう.